

Exercice 1 :

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = n + 1 + \frac{1}{n}$.

La suite u est définie par une **formule explicite**.

$$u_3 = 3 + 1 + \frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{4 \times 3 + 1}{3} = \frac{13}{3}.$$

2. $u_1 = 2$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{u_n}$.

La suite u est définie par **récurrence**.

$$\text{En posant } n = 1, \text{ on a : } u_2 = 1 + 1 + \frac{1}{u_1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{En posant } n = 2, \text{ on a : } u_3 = 2 + 1 + \frac{1}{u_2} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}.$$

3. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{u_n}$.

La suite u est définie par **récurrence**.

$$\text{En posant } n = 0, \text{ on a : } u_2 = u_1 + \frac{1}{u_0} = 2 + \frac{1}{1} = 2 + 1 = 3.$$

$$\text{En posant } n = 1, \text{ on a : } u_3 = u_2 + \frac{1}{u_1} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{3 \times 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Exercice 2 :

1. $u_n = 3n + 1$.

$$\text{a) } u_n + 1 = (3n + 1) + 1 = 3n + 2. \quad u_{n+1} = 3(n + 1) + 1 = 3n + 3 + 1 = 3n + 4.$$

$$\text{b) } u_{n+1} - u_n = (3n + 4) - (3n + 1) = 3n + 4 - 3n - 1 = 3.$$

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3 > 0$. Donc la suite u est (strictement) croissante.

2. $u_n = n^2$.

$$\text{a) } u_n + 1 = n^2 + 1. \quad u_{n+1} = (n + 1)^2.$$

$$\text{b) } u_{n+1} - u_n = (n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1.$$

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 1 > 0$, car $n \geq 0$. Donc la suite u est (strictement) croissante.

3. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

$$\text{a) } u_n + 1 = 1 + \frac{1}{n} + 1 = 2 + \frac{1}{n}. \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{b) } u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}.$$

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$, car $n > 0$. Donc la suite u est (strictement) décroissante.

Exercice 3 :

a) $u_n = \frac{1-n}{1+n}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{1-(n+1)}{1+(n+1)} - \frac{1-n}{1+n} = \frac{-n}{2+n} - \frac{1-n}{1+n} = \frac{-n(1+n) - (1-n)(2+n)}{(2+n)(1+n)} = \frac{-n - n^2 - (2+n - 2n - n^2)}{(2+n)(1+n)} \\&= \frac{-n - n^2 - 2 - n + 2n + n^2}{(2+n)(1+n)} = \frac{-2}{(2+n)(1+n)}.\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(2+n)(1+n)} < 0$, car $n \geq 0$. Donc la suite u est (strictement) décroissante.

b) $u_n = n^2 - 5n$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= ((n+1)^2 - 5(n+1)) - (n^2 - 5n) = (n^2 + 2n + 1 - (5n + 5)) - n^2 + 5n \\&= n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 - n^2 + 5n = 2n - 4.\end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow 2n - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2n \geq 4 \Leftrightarrow n \geq 2.$$

Pour tout entier $n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n = 2n - 4 \geq 0$. Donc la suite u est croissante à partir de $n = 2$.

c) $u_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} - 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3} - 1\right) = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2-3}{3} \\&= 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{-1}{3} = -5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} < 0$. Donc la suite u est (strictement) décroissante.

Exercice 4 :

1. $u_n = 3n + 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = (3n + 4) - (3n + 1) = 3n + 4 - 3n - 1 = 3.$$

La suite u est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 3 \times 0 + 1 = 1$.

2. $v_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$v_{n+1} = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} = v_n \times \frac{2}{3}.$$

La suite v est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 5 \times 1 = 5$.

Exercice 5 :

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \frac{9}{10} u_n + 2 - 20 = \frac{9}{10} u_n - 18$.

Or : $v_n = u_n - 20$, donc : $u_n = v_n + 20$.

On a donc :

$$v_{n+1} = \frac{9}{10} (v_n + 20) - 18 = \frac{9}{10} v_n + \frac{9}{10} \times 20 - 18 = \frac{9}{10} v_n + \frac{9}{10} \times 2 \times 10 - 18 = \frac{9}{10} v_n + 18 - 18 = \frac{9}{10} v_n.$$

La suite v est donc géométrique de raison $q = \frac{9}{10}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10$.

2. On a donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n$.

On en déduit enfin que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = v_n + 20 = 10 \left(\frac{9}{10}\right)^n + 20$.

Exercice 6 :

1. La suite u est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$, donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$\begin{aligned} 2. S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) \\ &= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right). \end{aligned}$$

3. Or : $0 \leq \frac{2}{3} < 1$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 6 \times (1 - 0) = 6$.